Modélisation phénoménologique des transferts couplés de Chaleur, d'Air et d'Humidité (HAM) : Analyse adimensionnelle

Professeur Rafik BELARBI
La Rochelle Université, LaSIE-UMR 7356 CNRS
rafik.belarbi@univ-lr.fr

GdR MBS
MATÉRIAUX de CONSTRUCTION BIOSOURCÉS

La Rochelle Université

LaSIE
Université La Rochelle

Ecole d'Automne GDR - MBS, La Rochelle, 10-14 novembre 2021

Modélisation phénoménologique des transferts couplés de Chaleur, d’Air et d’Humidité (HAM)

Professeur Rafik BELARBI
La Rochelle Université, LaSIE-UMR 7356 CNRS
Directeur du Département Génie Civil (2007-2019)
rafik.belarbi@univ-lr.fr

GdR MBS
MATÉRIAUX de CONSTRUCTION BIOSOURCÉS

Objectifs

- Identifier les mécanismes des transferts couplés de chaleur et de masse à différentes échelles

- Savoir modéliser ces mécanismes à l'échelle du milieu poreux, enveloppe et bâtiment

- Acquérir l'aptitude à choisir un niveau de modélisation adapté à un objectif donné : expérimentation, diagnostic, conception, identification.

- Être capable, à partir d'une connaissance du phénomène physique, de bâtir une modélisation des phénomènes de transferts de chaleur et masse couplés dans le domaine du bâtiment.

Problématiques et enjeux

❑ Exigences réglementaires

Les transferts de masse auraient de plus en plus d'influence sur les transferts de chaleur

❑ Performance énergétique et humidité

Prise en compte des transferts hydriques peut réduire la demande énergétique des bâtiments jusqu'à 30 %

❑ Qualité des ambiances et humidité

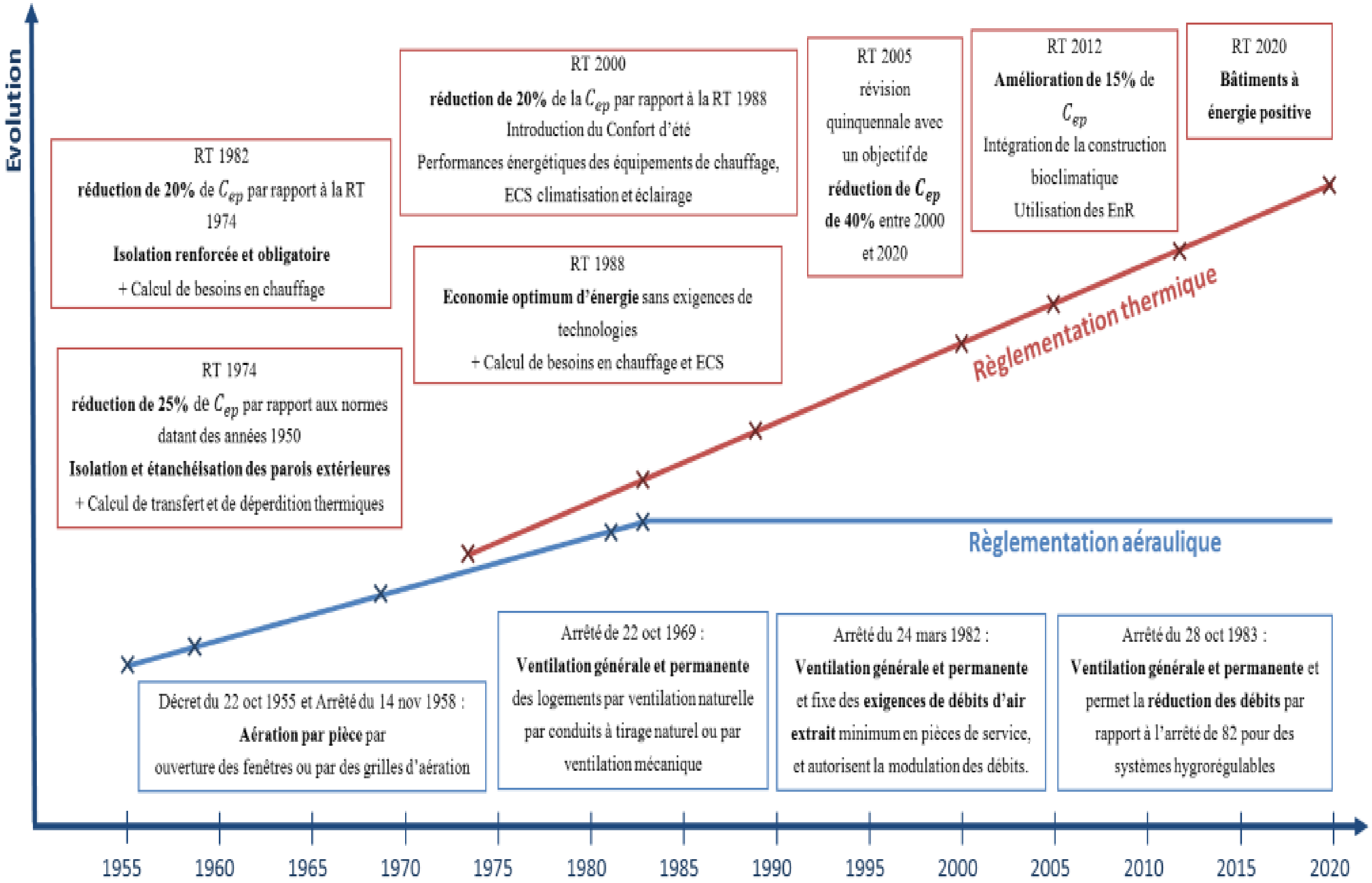
Allergies, maladies respiratoires (COV+HR élevée), croissance fongique

❑ Durabilité des matériaux et transferts hydriques

Dégradation des structures : corrosion, réduction de la durée de vie des ouvrages

Nécessité de maîtriser les transferts couplés de chaleur et d'humidité dans les ambiances et dans les matériaux

Problématiques et enjeux



- 2006 : test d'infiltrométrie des bâtiments selon la norme NF EN 13829.

- 2010 : RT2012, la consommation maximale d'une habitation neuve doit être de 50 kWh_{ep}/m.an (modulée selon la région et altitude),

- Perméabilité à l'air de 0.6m^3/(h.m²) en maison individuelle et 1m^3/(h.m²) en bâtiment collectif et renouvellement d'air minimal

- **Réduire l'impact carbone des bâtiments, continuer à améliorer leur performance énergétique et faire en sorte qu'ils restent frais pendant les étés chauds : tels sont les principaux objectifs du règlement RE2020.**

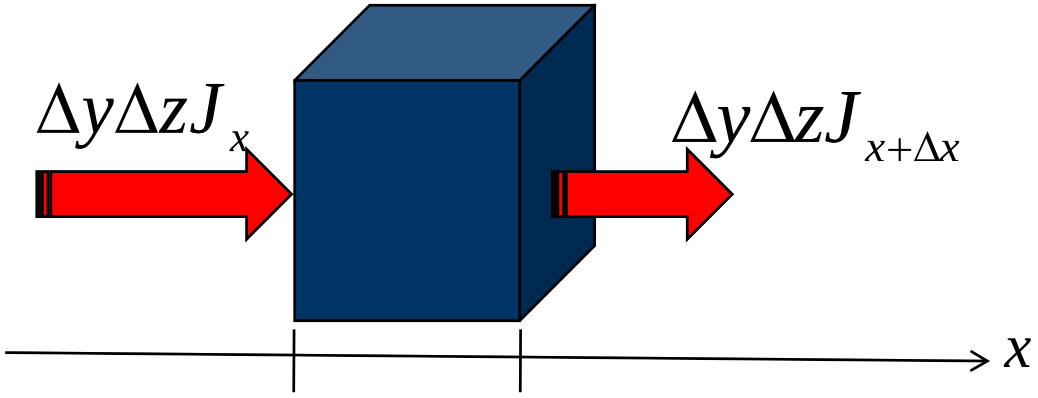
Equation de conservation de masse

Conservation de la masse (des espèces en présence)

Forme générale de l'équation de bilan

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{J}^{\,E} + S$$

E : Grandeur physique
Exemple : *m :* Masse
H : Enthalpie



En 1 D : $$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} = -\left(\frac{\partial J^E}{\partial x}\right)$$

- Conservation de la phase liquide : $$\frac{\partial u_l}{\partial t} = -div(j_l) + \dot{m}$$
- Conservation de la phase gazeuse (vapeur d'eau) : $$\frac{\partial u_v}{\partial t} = -div(j_v) - \dot{m}$$
- Conservation de l'air sec : $$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -div(j_a)$$
- Conservation de la masse totale : $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (u_l + u_v + u_a)}{\partial t} = -div\,(j_l + j_v + j_a)$$
- Conservation de la masse totale : $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (u_l + u_g)}{\partial t} = -div\,(j_l + j_g)$$

Développement des bilans de conservation de masse

Lois Phénoménologiques

- Expression des flux liquide et gazeux vapeur et air sec :

$$j_l = -k_l\,(\nabla P_c - \nabla P)$$ Loi de Darcy

$$j_v = -k_v\,\nabla P_v - k_{fv}\nabla P$$ Loi de Fick

- Expression du flux massique total :

$$j_m = -(k_v\,\nabla P_v + k_l\,\nabla P_c + k_f\,\nabla\,P)$$

$$k_f = k_l - k_{fv}$$

<u>Hypothèse : équilibre local entre la phase gazeuse et celle liquide</u>

- Expression de la pression capillaire :

$$P_c = \frac{R\,T\,\rho_e}{M}\ln(\varphi) = \frac{R\,T\,\rho_e}{M}\ln\left(\frac{P_v}{P_{sat}}\right)$$ Loi de Clausius Kelvin

Equation de conservation de masse

Conservation de la masse (des espèces en présence)

∇P_c? $P_c(T, \varphi)$ Donc : $P_c(T, Pv)$

$$\nabla P_c = \frac{R\,T\,\rho_e}{M\,P_v}\,\nabla P_v + \frac{R\,\rho_e}{M}\left(\ln\left(\frac{P_v}{P_{vsat}}\right) + T\,\frac{\partial \ln(\frac{P_v}{P_{vsat}})}{\partial T}\right)\nabla T$$

$$j_m = j_l + j_v = -\left[\,(K_L + k_v)\,\nabla P_v + K_T\,\nabla T + k_f \nabla P\right]$$

Avec : $K_L = \frac{k_l\,R\,T\,\rho_e}{M\,P_v}$ $K_T = \frac{k_l\,R\,\rho_e}{M}\left[\ln(\frac{P_v}{P_{vsat}}) + T\,\frac{\partial \ln(\frac{P_v}{P_{vsat}})}{\partial T}\right]$

Equation de conservation de masse

Conservation de la masse (des espèces en présence)

Sachant que : $$\frac{\partial\left(\rho_s u_m\right)}{\partial t} = div\left[\left(K_L + k_v\right)\nabla P_v + K_T\,\nabla T + k_f \nabla P\right]$$

Hypothèse : $$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$$

$$\rho_s \frac{\partial u_m}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = div\left[\left(k_L + k_v\right)\nabla P_v + k_T\,\nabla T + k_f \nabla P\right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial P_v}{\partial t}\frac{1}{P_{sat}} - \frac{P_v}{P_{sat}^{\,2}}\frac{\partial P_{sat}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ce qui donne: $$\rho_s \frac{\partial u_m}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial P_v}{\partial t}\frac{1}{P_{sat}} - \frac{P_v}{P_{sat}^{\,2}}\frac{\partial P_{sat}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right) = div\left[\left(k_L + k_v\right)\nabla P_v + k_T\,\nabla T + k_f \nabla P\right]$$

$$\rho_s \frac{\partial u_m}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial P_v}{\partial t}\frac{1}{P_{sat}}\right) = div\left[\left(k_L + k_v\right)\nabla P_v + k_T\,\nabla T + k_f \nabla P\right] + \rho_s \frac{\partial u_m}{\partial \varphi}\left(\frac{P_v}{P_{sat}^{\,2}}\frac{\partial P_{sat}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Posons: $k_m = k_L + k_v$ $\quad \beta = \rho_s\, C_m \dfrac{P_v}{P_{sat}}\dfrac{\partial P_{sat}}{\partial T}$ $\quad$ Avec: $C_m = \dfrac{1}{P_{sat}}\dfrac{\partial u_m}{\partial \varphi}$

L'équation finale sera sous la forme: $$\rho_s C_m \frac{\partial P_v}{\partial t} = div\left[k_m\,\nabla P_v + k_T\,\nabla T + k_f\,\nabla P\right] + \beta\frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de conservation de l'énergie

Conservation de l'enthalpie de l'ensemble des espèces

$$\frac{\partial H_T}{\partial t} = -div(j_q)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial C_P}{\partial t} = 0$$

- Expression de l'enthalpie totale :

$$H_T = \left(\rho C_p\right)_T . T$$

$$\left(\rho C_p\right)_T = \rho_s C_{ps} + \rho_v C_{pv} + \rho_a C_{pa}$$

- Expression du flux thermique :

Hypothèses

$$T_l = T_v = T_s = T$$

$$j_q = -\lambda \nabla T + h_l\, j_l + h_v\, j_v$$

$$= -\lambda \nabla T + h_l\, j_l + (\, L_v + h_l \,)\, j_v$$

$$= -\lambda \nabla T + h_l\, (j_l + j_v) + L_v\, j_v$$

Avec : $j_m = j_l + j_v$

$$j_q = \left[(h_l k_m + L_v k_v)\nabla P_v + (\lambda + h_l k_T)\nabla T + (k_f + L_v k_{f,v})\nabla P\right]$$

$$= -\lambda \nabla T - h_l \left[k_m \nabla P_v + k_T\, \nabla T + k_f\, \nabla P\right] - (L_v + h_l)[\, k_v\, \nabla P_v + k_{f,v}\, \nabla P\,]$$

Equation de conservation de l'énergie

Conservation de l'enthalpie de l'ensemble des phases

$$\frac{\partial H_T}{\partial t} = -div(j_q)$$

- Expression de l'enthalpie totale :

$$H_T = \rho_T \, C_{pT} \, T$$

- Expression du flux thermique :

Hypothèses

$$\frac{\partial \rho^{tot}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial C_P^{tot}}{\partial t} = 0$$

$$T_l = T_v = T_s = T$$

$$j_q = -\lambda \, \nabla T + h_l \, j_l + h_v \, j_v$$

$$= -\lambda \, \nabla T + h_l \, j_l + (\, L_v + h_l \,) \, j_v$$

$$= -\lambda \, \nabla T + h_l \, j_m + L_v \, j_v$$

Avec : $j_m = j_l + j_v$

$$= -\lambda \, \nabla T - h_l \left[k_m \nabla P_v + k_T \, \nabla T + k_f \, \nabla P \right] - L_v \left[\, k_v \, \nabla P_v + k_{f,v} \, \nabla P \, \right]$$

$$j_q = \left[(h_l k_m + L_v k_v) \nabla P_v + (\lambda + h_l k_T) \nabla T + (k_f + L_v k_{f,v}) \nabla P \right]$$

Equation de conservation de l'énergie

Expression du bilan énergétique

Nous obtenons :

$$j_q = -(\lambda + h_l\, k_T)\, \nabla T - [\, h_l\, (k_L + k_v) + L_v\, k_v]\, \nabla P_v - \left[\, h_l\, k_f + L_v\, k_{f,v} \,\right] \nabla P$$

$$(\rho C_p)^{tot} \frac{\partial T}{\partial t} = div\,(\, \lambda_T\, \nabla T + \alpha\, \nabla P_v + \mu\, \nabla P\,)$$

L'équation de bilan d'énergie finale :

$$(\rho C_p)^{tot} \frac{\partial T}{\partial t} = div\,(\, \lambda_T\, \nabla T + \alpha\, \nabla P_v + \mu\, \nabla P\,)$$

$$\lambda_T = \lambda + h_l\, k_T \qquad \alpha = h_l\, (k_L + k_v) + L_v\, k_v \qquad \mu = h_l\, k_f + L_v\, k_{f,v}$$

Equation de conservation de la pression de la phase gazeuse

Expression du flux de l'air humide

La phase gazeuse est constituée de l'air humide :
Vapeur + Air sec

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{\partial u_v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = -\,div(j_a)\; - div(j_v) = -div(j_a + j_v)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = -\,div(-k_f.\nabla P + k_a.\nabla P_a)\; - div(-k_v.\,\nabla P_v - k_{fv}\nabla P)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = div(k_v.\,\nabla P_v + (k_f + k_{fv})\nabla P - k_a.\nabla P_a)$$

$$u_g = \frac{P_a}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}$$

Hypothèse : La phase gazeuse est régis par la loi des gaz parfaits

La loi de dalton permet : $P = P_v + P_a$

$$u_g = \frac{P - P_v}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}$$

Equation de conservation de la pression de la phase gazeuse

Equation de conservation de la pression totale

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}\right) = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right) + \frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t}$$

En remplaçant $\frac{\partial u_g}{\partial t}$ dans l'équation de bilan, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}\right) = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right) + \frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t} = div(k_v.\nabla P_v + (k_f + k_{fv})\nabla P - k_a.\nabla P + k_a.\nabla P_v)$$

$$\frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} = div\big((k_v + k_a)\ \nabla P_v + (k_f + k_{fv} - k_a)\nabla P\big) + \frac{1}{T^2}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t}$$

Hypothèse : les termes $\frac{1}{T^2}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right)$ et $\left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)$ sont négligés car très petits par rapport aux autres termes de l'équation.

L'équation de conservation de la pression de la phase gazeuse finale :

$$\frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} = div\big((k_v + k_a)\ \nabla P_v + (k_f + k_{fv} - k_a)\nabla P\big)$$

Développement des bilans de conservation de masse

Lois Phénoménologiques (Nomenclature)

$\boldsymbol{u}\ [\boldsymbol{kg/m^3}]$ **qui représente la teneur en eau totale (liquide et vapeur d'eau),**

$\boldsymbol{u_a}\ [\boldsymbol{kg/kg}]$ **la teneur en air sec,**

$\boldsymbol{j_l}\ [\boldsymbol{kg/m^2 s}]$ **la densité de flux massique de la phase liquide,**

$\boldsymbol{j_v}\ [\boldsymbol{kg/m^2 s}]$ **la densité de flux massique de la vapeur d'eau,**

$\boldsymbol{j_a}\ [\boldsymbol{kg/m^2 s}]$ **la densité de flux massique de l'air sec,**

$\boldsymbol{j_q}\ [\boldsymbol{J/(m^2 \cdot s)}]$ **la densité de flux de chaleur,**

$\boldsymbol{t}\ [\boldsymbol{s}]$ **le temps,**

$\boldsymbol{T}\ [\boldsymbol{K}]$ **la température,**

$\boldsymbol{C_p}\ [\boldsymbol{J/kg \cdot K}]$ **la chaleur spécifique,**

$\boldsymbol{\rho_s}\ [\boldsymbol{kg/m^3}]$ **la masse volumique sèche.**

$\boldsymbol{P_c}\ [\boldsymbol{Pa}]$ **représente la pression capillaire,**

$\boldsymbol{P_v}\ [\boldsymbol{Pa}]$ **la pression de vapeur d'eau,**

$\boldsymbol{k_l}\ [\boldsymbol{kg/(m \cdot s \cdot Pa)}]$ **la conductivité hydraulique,**

$\boldsymbol{k_v}\ [\boldsymbol{kg/(m \cdot s \cdot Pa)}]$ **la perméabilité à la vapeur d'eau, et,**

$\boldsymbol{k_f = k_l - k_{fv}}\ [\mathbf{kg/(m \cdot s \cdot Pa)}]$ **Le coefficient d'infiltration.**

Equation de conservation de la pression de la phase gazeuse

Equation de conservation de la pression totale

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P - P_v}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}\right) = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{P - P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right) + \frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t}$$

En remplaçant $\frac{\partial u_g}{\partial t}$ dans l'équation de bilan, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a T} + \frac{P_v}{r_v T}\right) = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right) + \frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t} = div(k_v . \nabla P_v + (k_f + k_{fv})\nabla P - k_a . \nabla P + k_a . \nabla P_v)$$

$$\frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} = div\big((k_v + k_a)\ \nabla P_v + (k_f + k_{fv} - k_a)\nabla P\big) + \frac{1}{T^2}\left(\frac{P - P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)\frac{\partial P_v}{\partial t}$$

Hypothèse : les termes $\frac{1}{T^2}\left(\frac{P-P_v}{r_a} + \frac{P_v}{r_v}\right)$ et $\left(\frac{1}{r_v T} - \frac{1}{r_a T}\right)$ sont négligés car très petits par rapport aux autres termes de l'équation.

L'équation de conservation de la pression de la phase gazeuse finale :

$$\frac{1}{r_a T}\frac{\partial P}{\partial t} = div\big((k_v + k_a)\ \nabla P_v + (k_f + k_{fv} - k_a)\nabla P\big)$$

Equation de conservation de la pression de la phase gazeuse

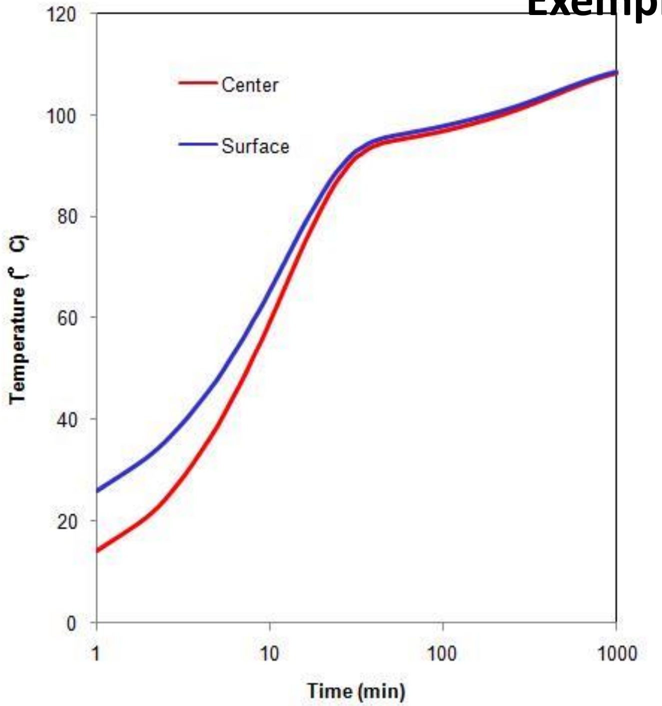
Expression du flux de l’air humide

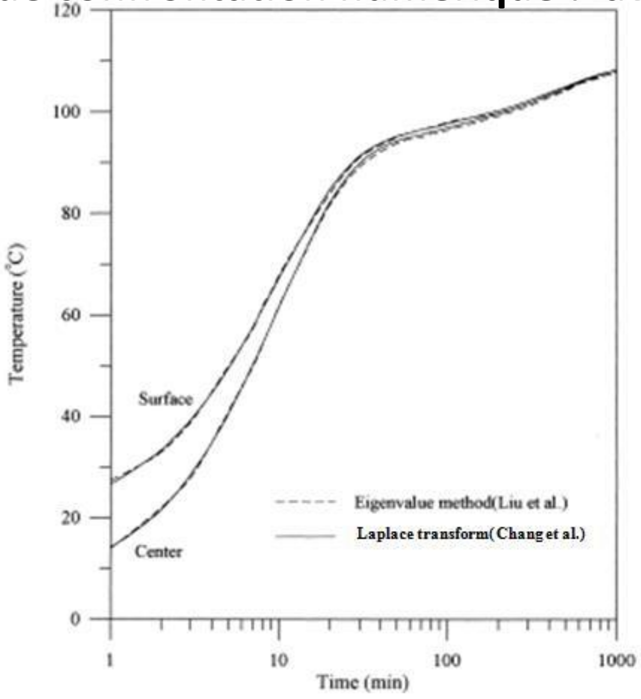
Le modèle de transferts couplés de chaleur, d’air et d’humidité HAM s’écrit :

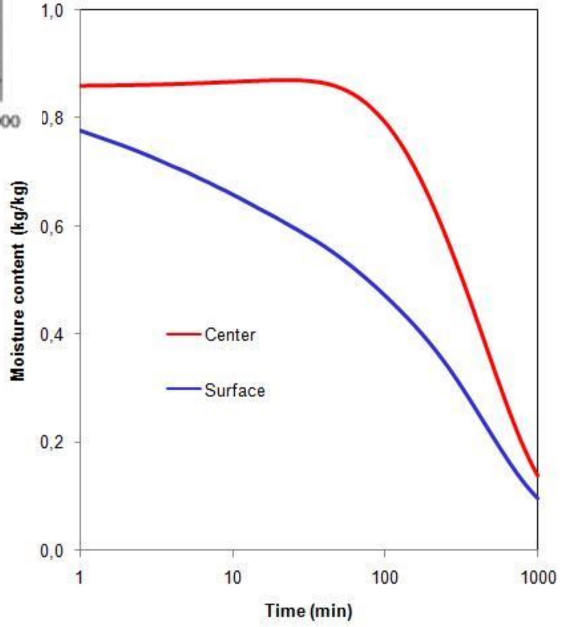
$$\left\{\begin{array}{l} \rho^{tot}\, C_m \dfrac{\partial P_v}{\partial t} = div\left[\, k_m\, \nabla P_v + k_T\, \nabla T + k_f\, \nabla P \right] + \beta\, \dfrac{\partial T}{\partial t} \\[2ex] \rho^{tot}\, C_P^{tot} \dfrac{\partial T}{\partial t} = div\, (\, \lambda_T\, \nabla T + \alpha\, \nabla P_v + \mu\, \nabla P\,) \\[2ex] \dfrac{1}{r_a T} \dfrac{\partial P}{\partial t} = div\Big((k_v + k_a)\, \nabla P_v + (k_f + k_{fv} - k_a) \nabla P \Big) \end{array}\right.$$

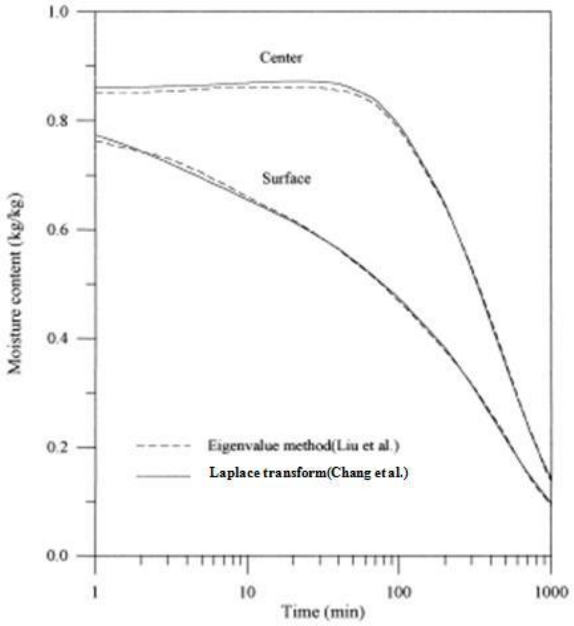
Effet de la pression de la phase gazeuse

Exemple de confrontation numérique : avec 2 potentiels de transfert









Effet de la pression de la phase gazeuse

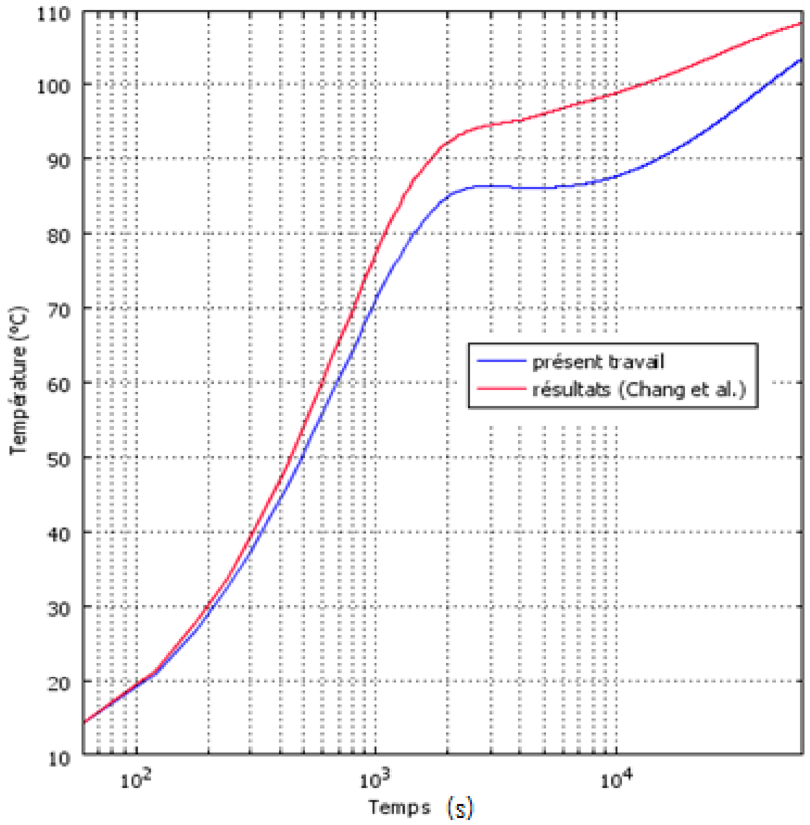
Exemple de confrontation numérique : Cas de 3 potentiels de transfert

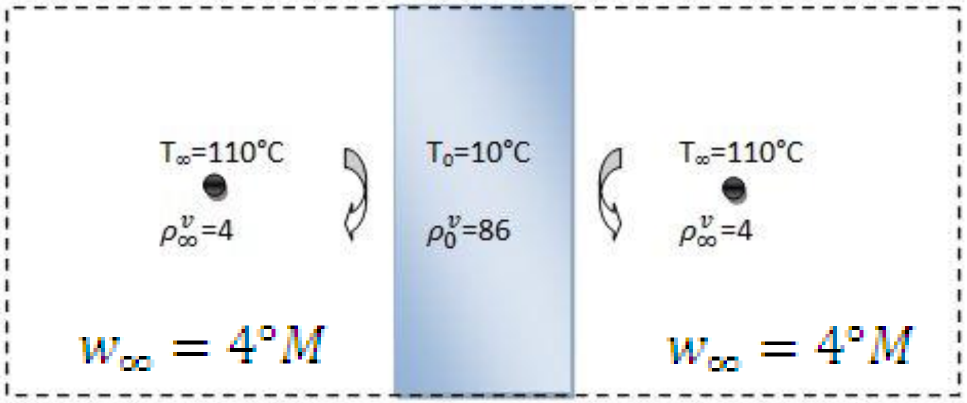
Séchage d'un mur en bois Fourier

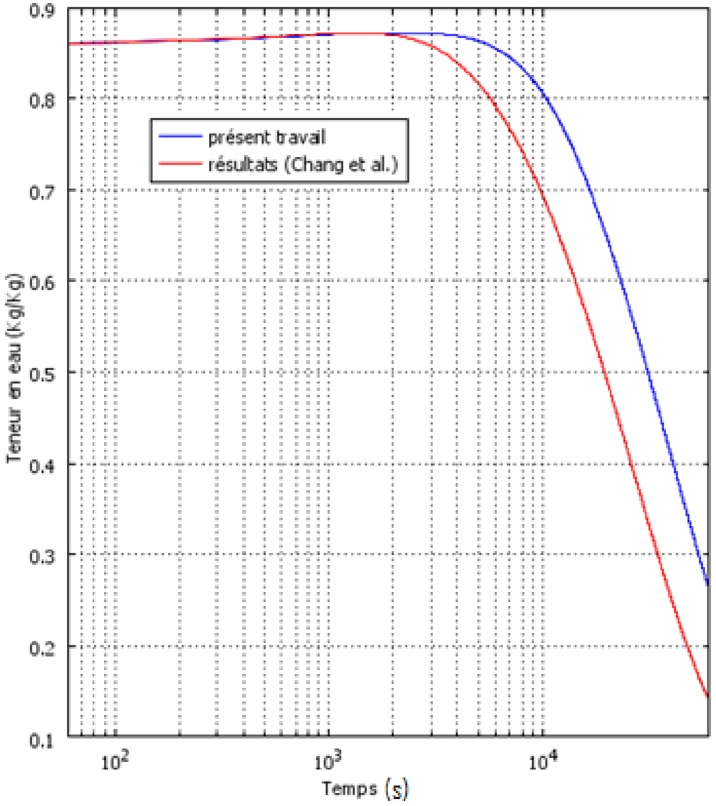
Conditions aux limites symétriques

$T_b = 10°C, w_b = 86°M$

$l\ (\mathrm{m}) = 0.024$







$\Delta p = 10\ Pa, \quad x = 0.012m$

$p_b = 101\ 325\ Pa$

Merci

Formulation adimensionnelle du problème

Cas de deux moteurs de transfert (Pv et T)

- Formulation dimensionnelle de l'espace + temps + moteurs de transfert:

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{L} \qquad z^* = \frac{z}{L} \qquad t^* = \frac{t}{t_0} \qquad u = \frac{P_v}{P_{v0}} \qquad v = \frac{T}{T_0} \qquad w = \frac{P}{P_0}$$

- Formulation dimensionnelle des propriétés du problème:

$$\rho^{tot*} = \frac{\rho^{tot}}{\rho_0^{tot}} \qquad C_m^* = \frac{C_m}{C_{m0}} \qquad k_m^* = \frac{k_m}{k_{m0}} \qquad k_T^* = \frac{k_T}{k_{T0}} \qquad k_f^* = \frac{k_f}{k_{f0}} \qquad C_a^* = \frac{C_a}{C_{a0}}$$

$$\beta^* = \frac{\beta}{\beta_0} \qquad C_P^{tot*} = \frac{C_P^{tot}}{C_{P0}^{tot}} \qquad \lambda^* = \frac{\lambda_T}{\lambda_{T0}} \qquad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_0} \qquad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Remarques :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_0}\frac{\partial}{\partial t^*}} \qquad \boxed{\nabla = \frac{1}{L}\nabla^*} \qquad \boxed{div\left(\frac{1}{L}\lambda\,\nabla^* T\right) = \frac{1}{L^2}div^*(\lambda\,\nabla^* T)}$$

A titre d'exemple

Formulation adimensionnelle du problème

- Equation de conservation de la masse :

$$\rho^{tot}\, C_m \frac{\partial P_v}{\partial t} = div\left[\, k_m \nabla P_v + k_T\, \nabla T + k_f\, \nabla P \,\right] + \beta\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^{tot*}\, C_m^* \frac{\partial u}{\partial t^*} = F_{om}\, div^*(k_m^*\, \nabla^* u) + F_{om}\, \delta_1\, div^*(k_T^*\, \nabla^* v) + F_{om}\, \delta_2\, div^*\left(k_f^*\, \nabla^* w\right) + \eta\, \beta^*\, \frac{\partial v}{\partial t^*}$$

Avec :

$$F_{om} = \frac{k_{m0}\, t_0}{\rho_0^{tot} C_{m0}\, L^2} \qquad \delta_1 = \frac{k_{T0}\, T_0}{k_{m0}\, P_{v0}} \qquad \delta_2 = \frac{k_{f0}\, P_0}{k_{m0}\, P_{v0}} \qquad \eta = \frac{\beta_0\, T_0}{\rho_0^{tot} C_{m0}\, P_{v0}}$$

Formulation adimensionnelle du problème

Nombres adimensionnels (équation de conservation de masse)

- Sens physique des nombres sans dimension:

$$F_{om} = \frac{k_{m0}\, t_0}{\rho_0^{tot} C_{m0}\, L^2}$$

Nombre de Fourier : la partie du flux massique transmis à travers le matériau par rapport à la masse stockée

$$\delta_1 = \frac{k_{T0}\, T_0}{k_{m0}\, P_{v0}}$$

Nombre $\boldsymbol{\delta_1}$: le degré d'influence du flux thermique sur celui massique

$$\delta_2 = \frac{k_{f0}\, P_0}{k_{m0}\, P_{v0}}$$

Nombre $\boldsymbol{\delta_2}$: le degré d'influence du flux d'air total sur celui massique (liquide + vapeur)

$$\eta = \frac{\beta_0\, T_0}{\rho_0^{tot}\, C_{m0}\, P_{v0}}$$

Nombre $\boldsymbol{\eta}$: la dynamique du transfert de chaleur par rapport au transfert de masse

Formulation adimensionnelle du problème

Equation de conservation de l'énergie

- Equation de conservation d'énergie :

$$\rho^{tot}\, C_P^{tot}\, \frac{\partial T}{\partial t} = div(\, \lambda_T \nabla T + \alpha\, \nabla P_v + \mu\, \nabla P\,)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^{tot*} C_P^{tot*} \frac{\partial v}{\partial t^*} = F_{oq}\; div^*(\,\lambda^*\; \nabla^* v) + F_{oq}\, \gamma_1\; div^*(\alpha^*\; \nabla^* u) + F_{oq}\, \gamma_2\; div^*(\mu^*\; \nabla^* w)$$

Avec :

$$F_{oq} = \frac{\lambda_{T0}\, t_0}{\rho_0^{tot}\, C_{P0}^{tot}\, L^2} \qquad \gamma_1 = \frac{\alpha_0\, P_{v0}}{\lambda_{T0}\, T_0} \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_0\, P_0}{\lambda_{T0}\, T_0}$$

Formulation adimensionnelle du problème

Nombres adimensionnels (équation de conservation de l'énergie)

- Sens physique des nombres sans dimension:

$$F_{oq} = \frac{\lambda_{T0}\, t_0}{\rho_0^{tot}\, C_{P0}^{tot}\, L^2}$$

Nombre de Fourier : la partie du flux thermique transmis à travers le matériau par rapport à la chaleur stockée

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_0\, P_{v0}}{\lambda_{T0}\, T_0}$$

Nombre γ_1 : le degré d'influence du flux massique sur celui thermique

$$\gamma_2 = \frac{\mu_0\, P_0}{\lambda_{T0}\, T_0}$$

Nombre γ_2 : le degré d'influence du flux d'air total sur celui thermique

Formulation adimensionnelle du problème

Equation de conservation de la phase gazeuse + Nombre adimensionnel

- Equation de conservation de la phase gazeuse :

$$C_a \frac{\partial P}{\partial t} = div\,(\,k_f\,\nabla P\,)$$

$$\Downarrow$$

$$C_a^* \frac{\partial w}{\partial t^*} = F_{oa}\,div^*(\,k_f^*\,\nabla^* P\,)$$

Avec :

$$F_{oa} = \frac{k_{f0}\,t_0}{C_{a0}\,L^2}$$

Nombre de Fourier : la partie du flux d'air total transmis à travers le matériau par rapport à la phase gazeuse stockée

Conditions aux limites du problème

Température + pression de vapeur

- Condition de Dirichlet :

$$T = T_s \qquad P_v = P_{vs} \qquad M \in \Gamma \quad t \in \Omega_t$$

- Condition de Neumann :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \alpha \frac{\partial P_v}{\partial n} = g_q \qquad -k_m \frac{\partial P_v}{\partial n} - k_T \frac{\partial T}{\partial n} = g_m \qquad M \in \Gamma \quad t \in \Omega_t$$

- Condition de Fourier :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \alpha \frac{\partial P_v}{\partial n} = h_c\,(T - T^{\infty}) + h_m\,L_v\,(P_v - P_v^{\infty}) \qquad -k_m \frac{\partial P_v}{\partial n} - k_T \frac{\partial T}{\partial n} = h_m\,(P_v - P_v^{\infty})$$

$$M \in \Gamma \quad t \in \Omega_t$$

Conditions aux limites du problème en adimensionnel

Température + pression de vapeur

- Condition de Dirichlet :

$$v = v_s \qquad u = u_s \qquad M \in \Gamma^* \quad t \in \Omega_t^*$$

- Condition de Neumann :

$$-\theta_{qq}\,\lambda^*\,\frac{\partial v}{\partial n^*} - \theta_{mq}\,\alpha^*\,\frac{\partial u}{\partial n^*} = 1 \qquad -\theta_{mm}\,k_m^*\,\frac{\partial v}{\partial n^*} - \theta_{qm}\,k_T^*\,\frac{\partial u}{\partial n^*} = 1 \qquad M \in \Gamma^* \quad t \in \Omega_t^*$$

- Condition de Fourier :

$$-\lambda^*\,\frac{\partial v}{\partial n^*} - \gamma\,\alpha^*\,\frac{\partial u}{\partial n^*} = Bi_q\,(v - v^\infty) + \gamma\,\epsilon\,L_v^*\,(u - u^\infty) \qquad -k_m^*\,\frac{\partial u}{\partial n^*} - \delta\,k_T^*\,\frac{\partial u}{\partial n^*} = Bi_m\,(u - u^\infty)$$

$$M \in \Gamma^* \quad t \in \Omega_t^*$$

Conditions aux limites du problème en adimensionnel

Température + pression de vapeur

$$\theta_{qq} = \frac{\lambda_{T0}\, T_0}{g_q\, L} \qquad \theta_{mq} = \frac{\alpha_0\, P_{v0}}{g_q\, L} \qquad \theta_{mm} = \frac{k_{m0}\, P_{v0}}{g_m\, L}$$

$$\theta_{qm} = \frac{k_{T0}\, T_0}{g_m\, L} \qquad \epsilon = \frac{h_m\, L_{v0}\, L}{\alpha_0}$$

$$Bi_q = \frac{h_c\, L}{\lambda_{T0}} \qquad Bi_m = \frac{h_m\, L}{k_{m0}}$$

Nombre de Biot : le ratio entre la résistance au transfert de chaleur/masse au sein du matériau et celle à l'interface avec l'air